



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS



MODELAGEM EXPONENCIAL E DE POISSON PARA DADOS REAIS DE MOBILIDADE URBANA

**RELATÓRIO FINAL DE PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA
(PIBIC/CNPq/INPE)**

Maria Carolina Barbosa Jurema (UNESP, Bolsista PIBIC/CNPq)
E-mail: mariacarolinabj@gmail.com

Dr. Solon Venâncio de Carvalho (LAC/CTE/INPE, Orientador)
E-mail: solon@inpe.com.br

Dr. Leonardo Bacelar Lima Santos (CEMADEN/MCTI), Orientador)
E-mail: santoslbl@gmail.com

Julho de 2015

Resumo

O presente trabalho, iniciado em junho de 2014, teve como objeto de estudo dados reais de mobilidade urbana referentes à cidade de São José dos Campos, aplicados a modelos estatísticos computacionais. O projeto iniciou-se com desenvolvimento de códigos em Linguagem C para a simulação de eventos de mobilidade em uma cidade virtual hipotética representada por uma matriz quadrada, usando dados aleatórios de fluxo populacional. Ao longo de todo o projeto foi imprescindível o estudo teórico de conceitos relacionados à mobilidade urbana e deslocamentos populacionais no espaço definido por uma cidade, como conceitos de fluxo urbano e zonas de tráfego, e o entendimento dos modelos estatísticos utilizados (exponencial, Poisson e gravitacional). Aplicou-se então, aos códigos desenvolvidos, dados reais de quantidade de população e área da cidade de São José dos Campos. As distâncias euclidianas entre as zonas de tráfego foram calculadas via Sistema de Informações Geográficas (SIG). Dados reais de fluxo populacional de São José dos Campos foram fornecidos pela parceria com o IPPLAN. Foram gerados mapas de fluxo para cada uma das zonas de tráfego, considerando o fluxo de chegada, de saída, total e intrazona. Estes valores e dados adquiridos foram empregados no modelo estatístico gravitacional, gerando gráficos de fluxo por distâncias entre as zonas com boa aderência aos dados reais, e distribuições estatísticas que mostraram que nem o ajuste exponencial nem o de Poisson representam adequadamente os dados, potencialmente devido à resolução espacial e temporal. Durante o projeto, foi fundamental exercer a prática da utilização de SIG, principalmente o *TerraView*, desenvolvido pelo INPE, e ambientes de desenvolvimento e compilação para os códigos em Linguagem C. Os resultados obtidos foram apresentados no XVIII Encontro Latino Americano de Iniciação Científica da Universidade do Vale do Paraíba (UNIVAP) e submetidos ao XXI Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos (SBRH).

Introdução

O grande crescimento das cidades é uma consequência do processo de urbanização, que, em países subdesenvolvidos, geralmente ocorre de forma desordenada. Este desenvolvimento urbano irregular implica na desorganização das cidades, o que compromete serviços públicos como o transporte.

A partir disto, estudos voltados à questão de mobilidade urbana vêm progredindo, com o intuito de analisar e viabilizar o deslocamento da população em diferentes regiões.

Mobilidade urbana pode ser compreendida, basicamente, como o deslocamento de pessoas e bens em um espaço urbano, conforme Araújo (2012). A infraestrutura da região é responsável por conduzir os deslocamentos no espaço e tempo, o que determina o conceito de rede. Já as macrodecisões ocorrentes nas redes, são denominadas fluxos, considerados orientadores do processo no espaço.

De acordo com Santos (1988), a materialidade construída (fixa) é a fonte de relações sociais, que também se dão por intermédio dos objetos. Os fluxos acontecem, portanto, pelas interações sociais ocorrentes sobre a rede fixa. Entre estas relações estão

inclusas viagens diárias ao trabalho, migrações, e todo tipo de movimento da massa populacional através do território.

Exploraram-se também alguns conceitos que estão ligados a estudos de mobilidade urbana, como a definição de Zonas de Tráfego (ZT) e dados de Origem-Destino (OD). Zonas de Tráfego são compreendidas como as divisões de uma região para estudos de transportes, definidas por polígonos inseridos nesta região. Já os dados de Origem-Destino se reportam a deslocamentos diários de um lugar de Origem a um lugar de Destino. Exemplificando o conceito de Zonas de Tráfego, a Figura 1 representa a Região Metropolitana do Rio de Janeiro (RMRJ), com destaque para os centroides de cada uma das ZTs.

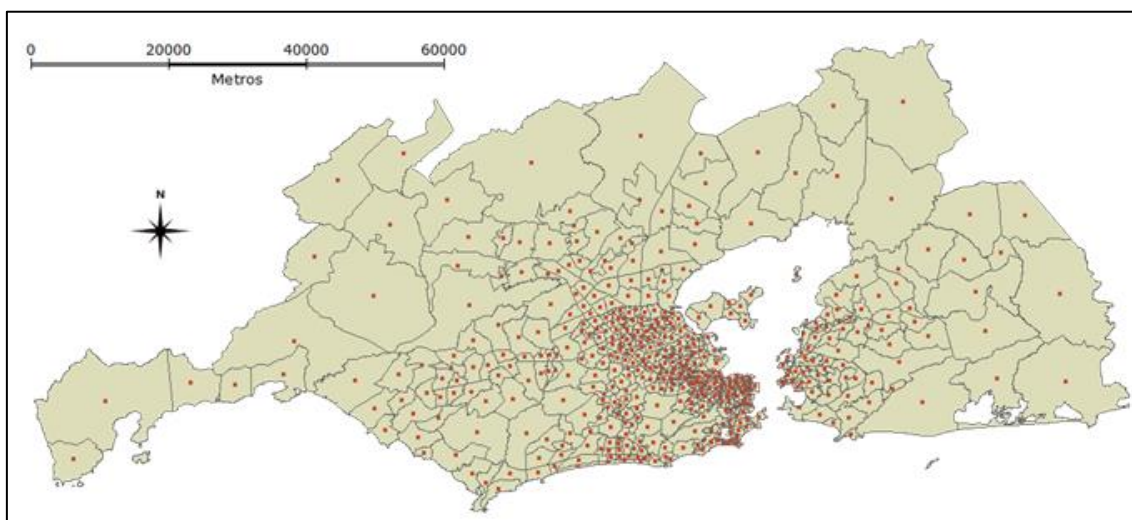


Figura 1: Zonas de Tráfego e centroides da Região Metropolitana do Rio de Janeiro (RMRJ).

Além destas definições, estudou-se sobre modelos de interação espacial, focalizando principalmente no modelo gravitacional, neste primeiro período. De acordo com Santos (2014), os modelos gravitacionais possibilitam o ajuste teórico do movimento de pessoas de um lugar a outro de determinada região, quando não há um grande volume de dados empíricos de mobilidade.

Com base nestes conceitos, objetivou-se estudar os padrões de circulação, definidos por fluxos populacionais em uma região de estudo. A partir disso, o desenvolvimento do projeto consistiu basicamente no questionamento: Como analisar os padrões de circulação de uma determinada região e qual metodologia empregar?

Este relatório tem como objetivo destacar as principais atividades desenvolvidas durante o período do projeto de iniciação científica, com financiamento CNPq, entre julho de 2014 e julho de 2015.

Materiais e Métodos

Inicialmente, focou-se o trabalho na implantação de um programa, em linguagem C, que tivesse como objetivo gerar fluxos aleatórios sobre os componentes de uma matriz previamente elaborada. Para implantação deste código, utilizaram-se

programas gratuitos de desenvolvimento de projetos em linguagem C e C++, como o *Falcon* e *Dev C++*.

Posterior ao desenvolvimento deste código analisou-se estatisticamente os dados fornecidos por sua compilação, utilizando o programa *Origin 7.0* para plotar gráficos.

Após esta etapa de análises virtuais e fluxos aleatórios, prosseguiu-se com o estudo de casos concretos de circulação populacional urbana. Para isso, foram utilizados dados reais fornecidos pelo IPPLAN (Instituto de Pesquisa, Administração e Planejamento), relativos ao fluxo da população de São José dos Campos nas diferentes zonas de tráfego existentes na cidade. Utilizou-se também o software gratuito *TerraView*, fornecido e desenvolvido pelo INPE, como visualizador de dados geográficos, em que foram aplicados estes dados.

Desenvolvimento e resultados

O código inicialmente desenvolvido foi denominado “*Assentamentos Aleatórios*”, e seu objetivo é representar virtualmente uma cidade, em que a matriz quadrada inicialmente formada por algarismos iguais a 0 e 1 corresponde ao território de estudo.

Um arquivo de entrada possui dois valores numéricos: um que indica a dimensão da matriz quadrada, e outro que determina quantos algarismos desta matriz serão iguais a 1. Estes algarismos iguais a 1 são dispostos de forma randômica na matriz, e cada um deles representa virtualmente um centroide de uma zona de tráfego da região. Portanto, o número de algarismos iguais a 1 indica o número de zonas de tráfego deste território pressuposto.

Estes dois valores fornecidos pelo arquivo de entrada são necessários para o desenvolvimento do código, que também calcula a distância entre cada uma destas zonas de tráfego, utilizando a fórmula básica de distância entre dois pontos de acordo com as coordenadas dos pontos na matriz.

Os valores obtidos das distâncias são incorporados em um arquivo de saída (.txt), o que proporciona a utilização destes dados para posteriores análises. Para isso, os dados foram empregados no programa *Origin 7.0* com intuito de gerar gráficos de distância por frequência.

A seguir, tem-se a representação gráfica de dois diferentes casos, em que n representa a dimensão da matriz e m o número de elementos iguais a 1 desta matriz (ou seja, é o número de zonas de tráfego da região delimitada pela matriz):

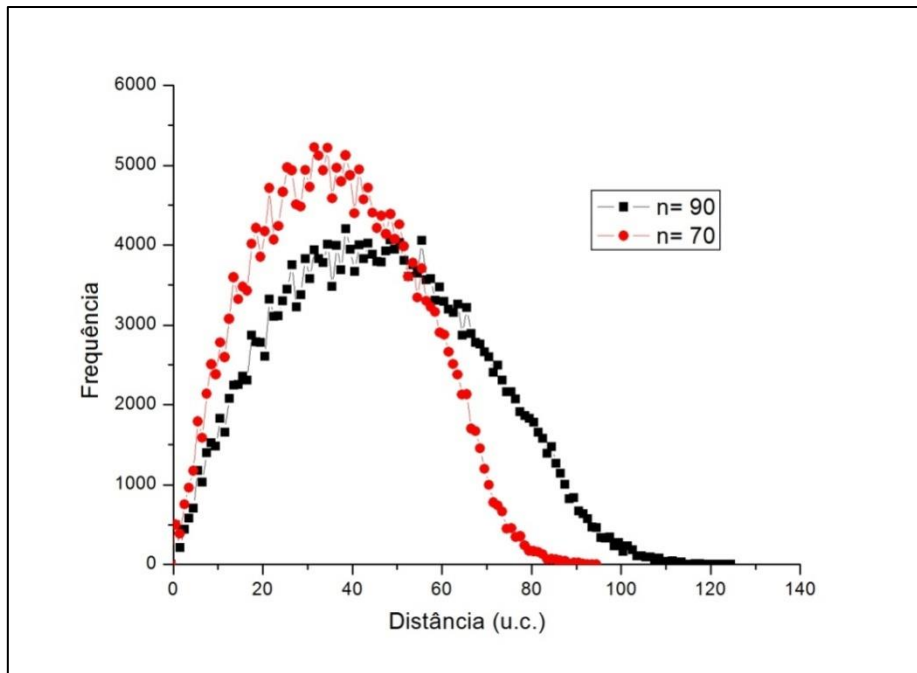


Figura 2. *Distribuição de distâncias em centroides simulados.* Neste caso, o valor de m foi fixado (especificamente em 500), enquanto n foi escolhido arbitrariamente (90 e 70), gerando o gráfico de frequência x distância acima.

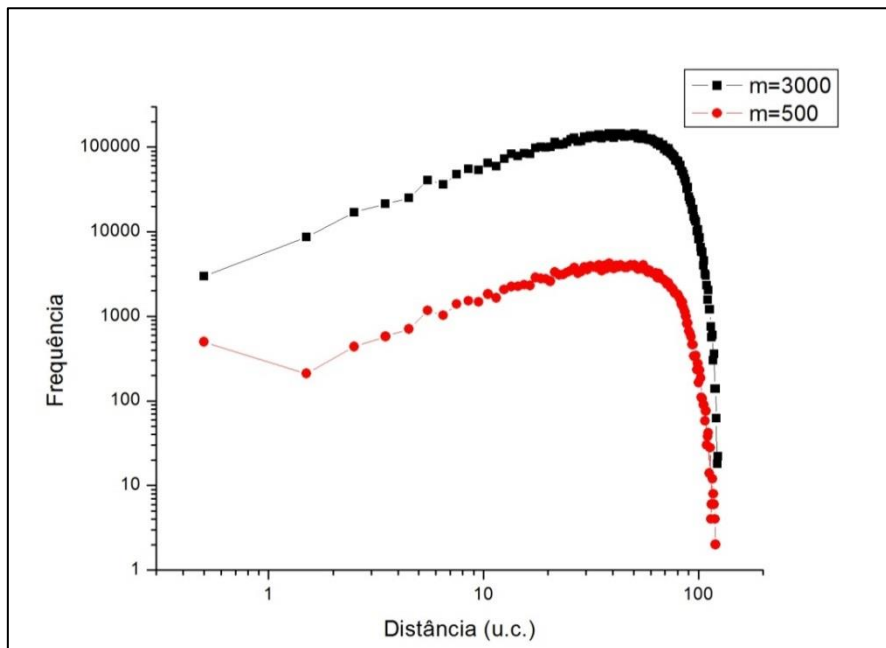


Figura 3. *Distribuição de distâncias em centroides simulados.* Neste caso, o valor de n foi fixado, enquanto m foi escolhido arbitrariamente, gerando o gráfico de frequência x distância acima.

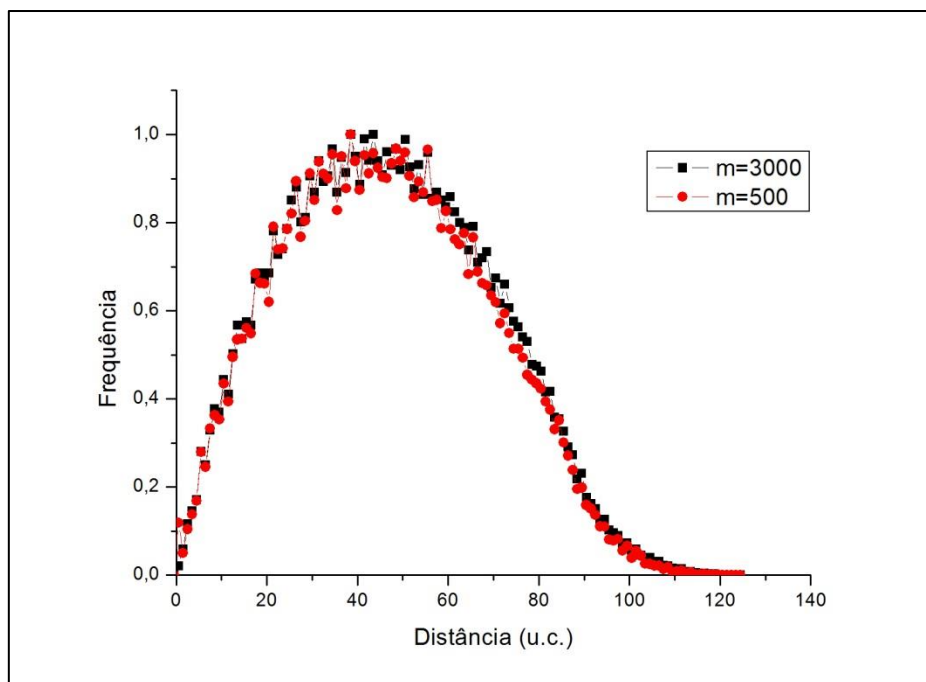


Figura 4. *Distribuição de distâncias em centroides simulados.* Este gráfico representa os mesmos dados do anterior (Figura 3), porém com a distribuição normalizada, com o intuito de melhor visualizar os resultados.

A análise gráfica dos dados de distância fornecidos pelo código permite afirmar que, ao fixar o valor de m (Figura 2), as curvas relativas aos valores de n (dimensão da matriz) distintos apresentam diferença, tanto em relação ao eixo x quanto ao eixo y , ou seja, elas não são dependentes. De maneira genérica, tem-se que ao aumentar o valor numérico de n , aumenta-se a dimensão da matriz, ou seja, por consequência, a área da região de estudo será maior. Com isso, a distribuição das Zonas de Tráfego numa área maior terá mais probabilidade de abranger maiores distâncias.

Por outro lado, analisando o resultado obtido ao fixar o valor de n (Figura 3 e 4), percebe-se que as curvas relativas aos valores de m distintos apresentam comportamento semelhante em relação ao eixo x , visto que somente a frequência é alterada. Tem-se então que a distribuição de diferentes números de Zonas de Tráfego em áreas iguais provoca uma intensificação das frequências para um m maior. Ou seja, ao aumentar o valor de m (ZTs), percebe-se que a única alteração é a frequência de cada uma das distâncias.

Além de fornecer dados de distância, o código é capaz de desenvolver uma distribuição aleatória de valores correspondentes a um intervalo numérico pré-determinado, inserindo-os no lugar de cada elemento igual a 1. Forma-se assim uma nova matriz de distribuição, em que os elementos anteriormente iguais a 1 foram substituídos por diferentes números que fazem parte do intervalo. Esses novos elementos representam virtualmente a quantidade de pessoas que está em cada zona de tráfego, e são essas pessoas que devem interagir na região para determinar os fluxos populacionais.

Assim sendo, o código estima o fluxo populacional entre cada uma das zonas de tráfego, formando uma nova matriz, denominada matriz de fluxos, com novos valores de população. Para isso, ele realoca os elementos de cada Zona de Tráfego em uma posição aleatória na nova matriz de dimensões $m \times m$. Todos os dados obtidos após o

desenvolvimento deste código são salvos em arquivos (.txt) que podem ser usados posteriormente para análises.

De forma geral, este programa tem, portanto, o intuito de representar o fluxo populacional em uma região conhecida, de maneira virtual, com dados hipotéticos.

Prosseguindo com o andamento do projeto, o próximo passo foi estudar os dados reais cedidos pela parceria com o IPPLAN. Os dados que foram utilizados consistiam na matriz de fluxos de viagens de São José dos Campos, e a partir deles foi possível obter os valores de fluxo totais para cada Zona de Tráfego. Estes fluxos totais consistem em: fluxos de saída, que reporta à quantidade de pessoas que deixa uma ZT; e fluxos de chegada, que reportam à quantidade de pessoas que chegam a uma ZT. Além disso, calculou-se a subtração entre os fluxos, em que o valor obtido consiste na diferença entre quantidade de pessoas que chega e a quantidade que sai da mesma zona. Os valores utilizados para os fluxos totais de saída e de chegada já se encontravam nos dados originais fornecidos pelo IPPLAN. Já os valores da soma e de diferença intrazona foram calculados a partir dos dados originais.

O território de São José dos Campos abrange 55 zonas, sendo que 51 dessas são consideradas Zonas de Tráfego. Foram analisados os dados de viagens que tiveram origem e destino dentro cidade, e a porcentagem que compreende este tipo de viagem é equivalente a mais de 98% do total.

Os dados de fluxos totais foram plotados no *TerraView* juntamente a um arquivo no formato .shp com dados geográficos da cidade, o que possibilitou criar os mapas de forças a seguir, em que as zonas com coloração mais próxima do vermelho indicam maior intensidade do fluxo populacional. As zonas representadas na cor branca são consideradas vazios urbanos ou rurais, e não apresentam dados de fluxo, portanto não são consideradas como Zonas de Tráfego.

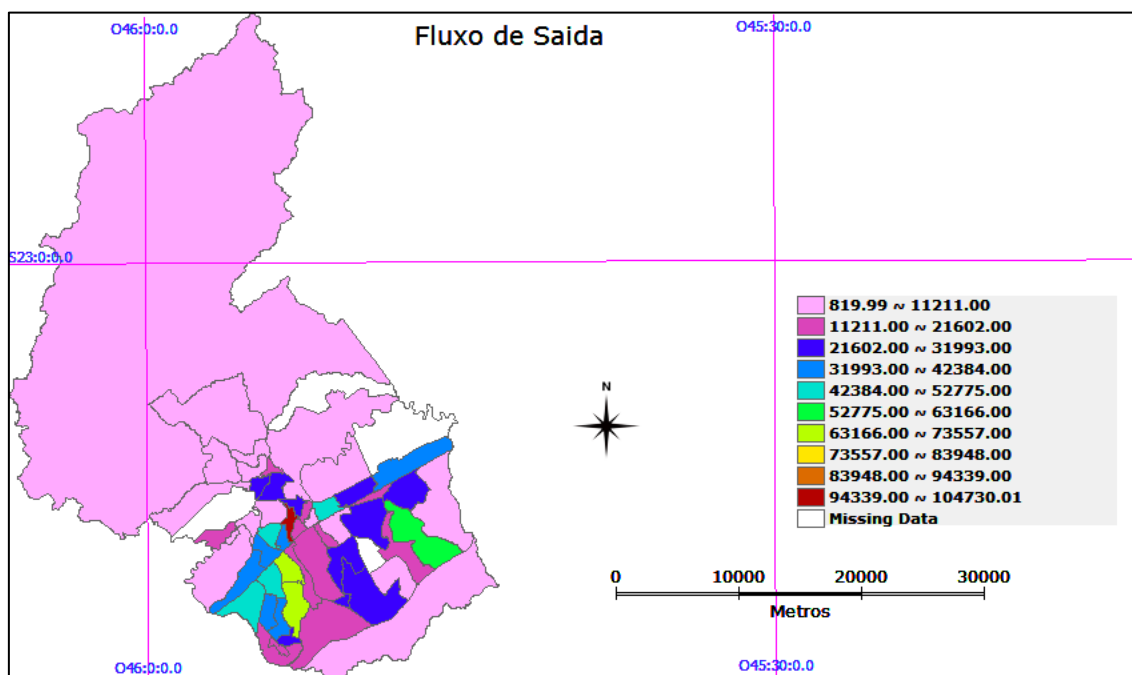


Figura 5. Mapa de forças referente ao “fluxo de saída”, destacando as 55 zonas de São José dos Campos.

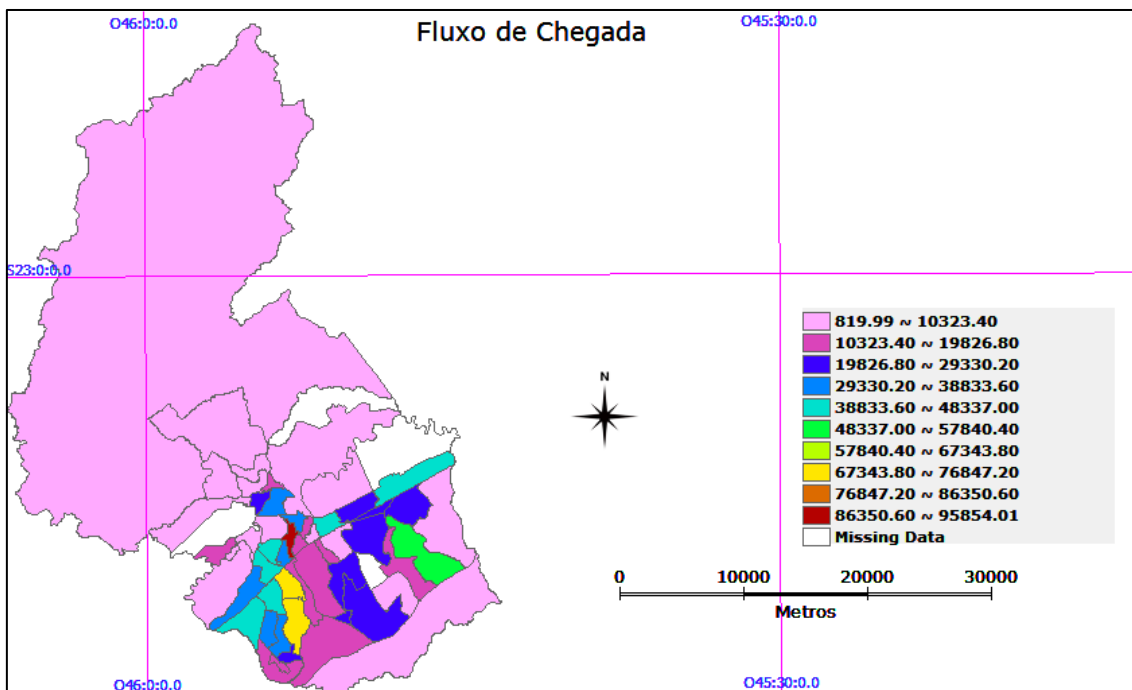


Figura 6. Mapa de forças referente ao “fluxo de chegada”, destacando as 55 zonas de São José dos Campos.

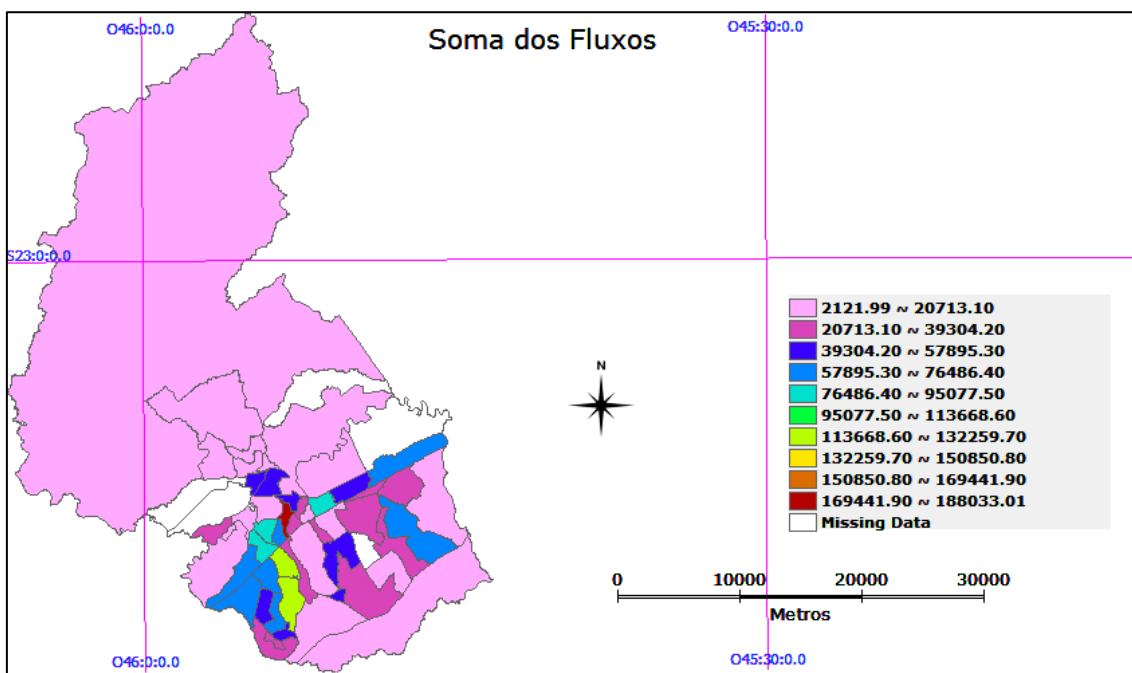


Figura 7. Mapa de forças referente aos “fluxos totais” (soma dos fluxos de saída e chegada), destacando as 55 zonas de São José dos Campos.

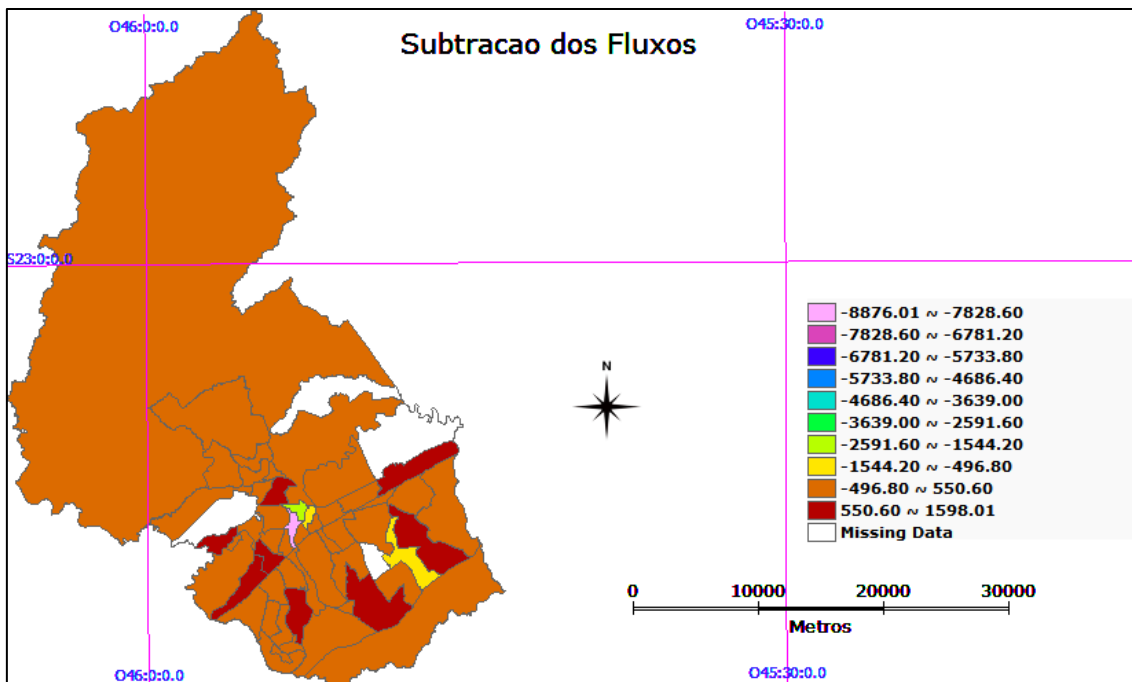


Figura 8. Mapa de forças referente à “subtração dos fluxos” (diferença entre o fluxo de chegada e saída), destacando as 55 zonas de São José dos Campos.

A análise visual dos mapas gerados revela que a intensidade do fluxo se concentra nas zonas centrais da cidade. O centro de São José dos Campos é representado pela zona de tráfego que apresenta a cor mais intensa do mapa de “fluxos totais”. Este resultado era esperado, visto que esta zona abrange o polo comercial econômico da cidade, onde grande parte da população se desloca diariamente para trabalhar ou estudar.

Além disso, desenvolveram-se análises sobre o fluxo populacional que ocorre numa mesma zona de tráfego, que foi denominado como “fluxo intrazona”. Ou seja, este fluxo abrange os dados em que a zona de origem é a mesma que a zona de destino. A seguir tem-se o mapa gerado, em que a coloração indica a intensidade do fluxo.

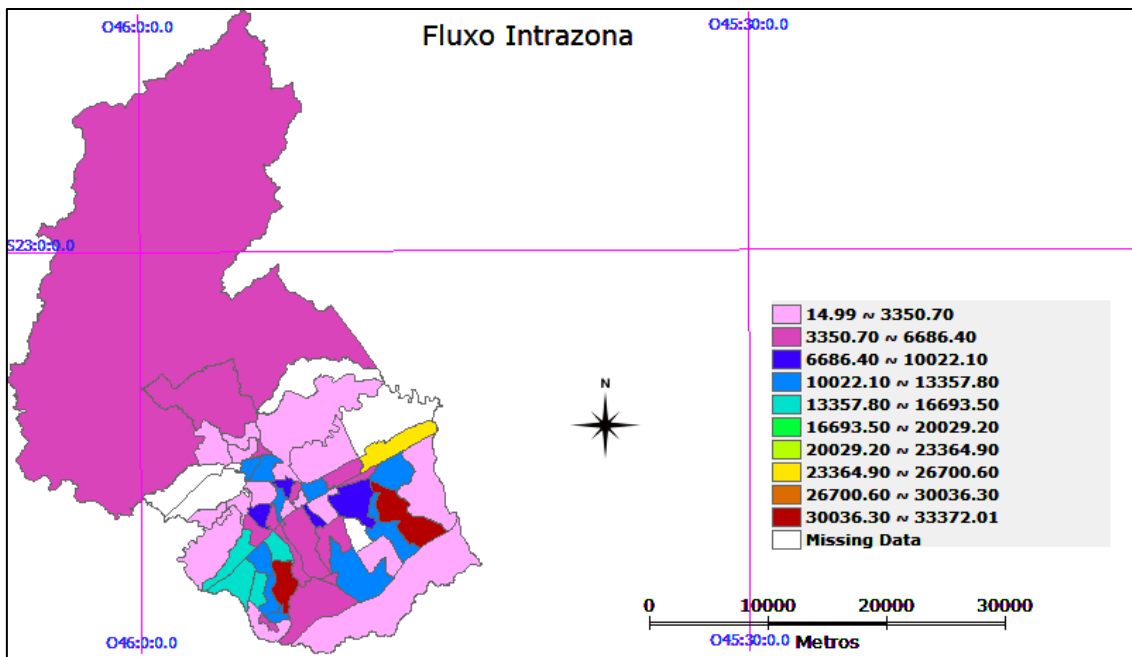


Figura 9. Mapa de forças referente ao “fluxo intrazona” (fluxo ocorrente em uma mesma zona), destacando as 55 zonas de São José dos Campos.

Com esses dados também foi possível elaborar um gráfico de dispersão (fluxo de saída x fluxo de chegada), utilizando o Origin 7.0. A análise do gráfico indica que a quantidade de pessoas que sai de uma zona não difere muito da quantidade que chega a essa mesma zona, o que revela o comportamento dos pontos no gráfico, que tende a ser linear.

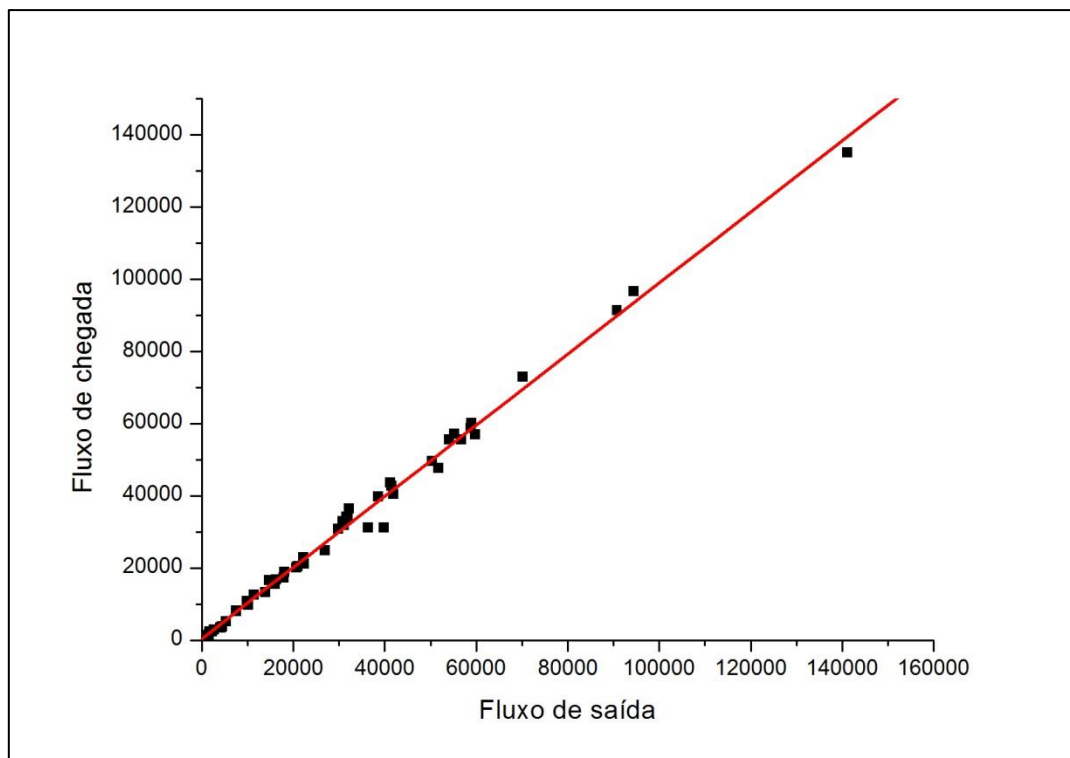


Figura 10. Fluxo nas Zonas de Tráfego de São José dos Campos, em que cada ponto representa uma ZT.

Foi avaliada a aderência do modelo exponencial e de Poisson aos dados. A ZT de maior fluxo de chegada, exatamente a zona da região mais central da cidade, foi escolhida para tal análise, uma vez que tais modelos descrevem classes de processos de chegada. Apesar da média da distribuição (1904) ter valor bem próximo ao desvio padrão (2142), o histograma não mostra um comportamento nem do tipo exponencial, nem do tipo Poisson.

Aplicou-se então, aos dados de Origem-Destino, o Modelo Gravitacional de interação espacial, que possibilita o ajuste do valor teórico dos fluxos para estimar novos valores do deslocamento populacional (vide Dicionário em anexo, página 14). Este modelo foi aplicado a dois casos, utilizando valores hipotéticos e euclidianos de distâncias entre as ZTs.

Como especificado anteriormente, São José dos Campos possui 51 Zonas de Tráfego, e, sabe-se também que a cidade abrange cerca de 1.100 km². Convertendo essas informações de modo que sejam inseridas no programa “Assentamentos Aleatórios”, tem-se que o valor de m (ZTs) é igual a 51. Além disso, uma matriz quadrada de 33x33 corresponde a aproximadamente o valor de área do município, portanto, n (dimensão da matriz) é igual a 33.

Inserindo estes dois valores no arquivo de entrada do programa, obtêm-se os valores hipotéticos de distâncias correspondentes à São José dos Campos. Relacionando estes valores de distância aos dados reais de fluxo, tem-se o gráfico da Figura 11.

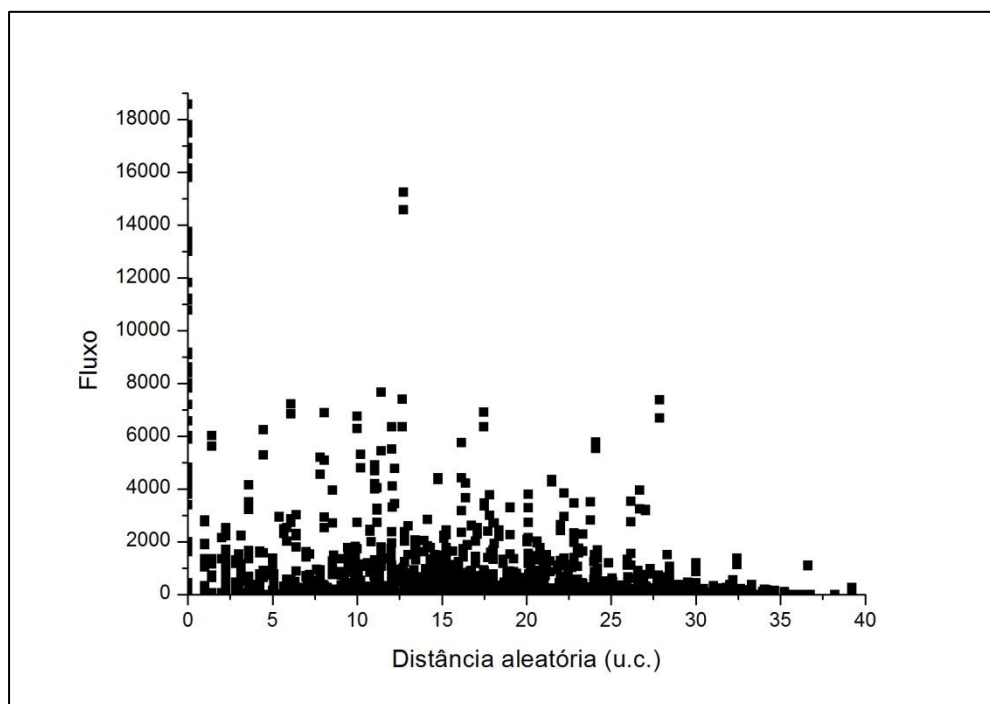


Figura 11. Fluxo x distâncias modeladas aleatoriamente.

O comportamento dos pontos na Figura 11 não se assemelha ao padrão do modelo gravitacional.

Em seguida, aplicou-se o Modelo Gravitacional empregando os valores de distâncias euclidianas entre os centroides das Zonas de Tráfego, calculadas através de um Sistema de Informações Geográficas (SIG). O gráfico seguinte representa o Modelo

Gravitacional aplicado aos dados de fluxo populacional, em que o vermelho representa os dados reais e o verde os dados estimados pelo modelo.

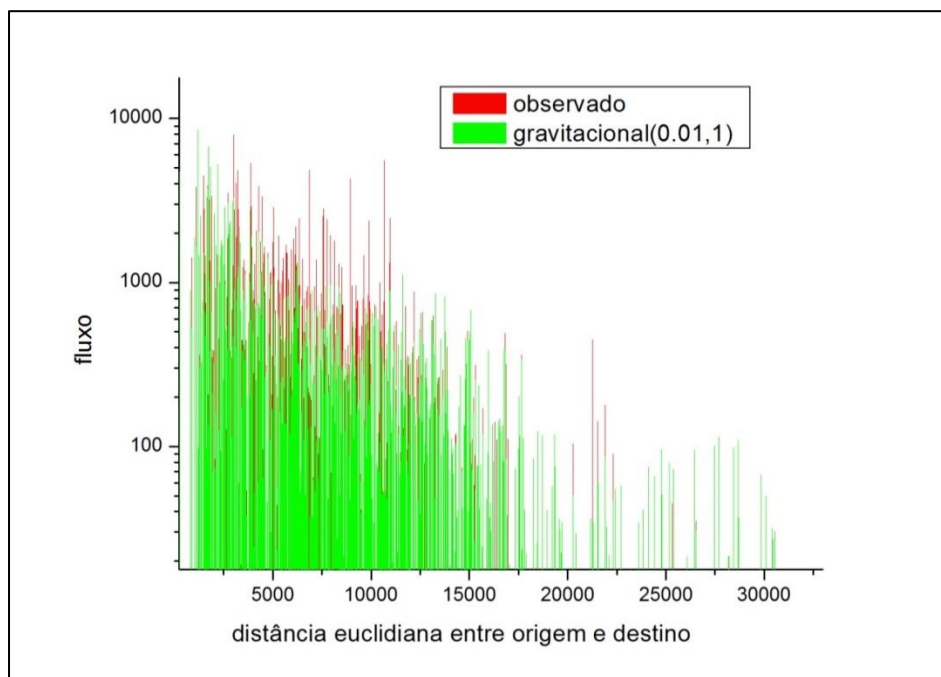


Figura 12. Fluxo x distâncias euclidianas. Aplicação do Modelo Gravitacional aos dados de Origem-Destino.

Observando a Figura 12, nota-se que o comportamento dos valores estimados pelo modelo está relativamente próximo dos valores reais, comparando visualmente.

Conclusões

O desenvolvimento do projeto culminou em resultados proveitosos, que contribuem com estudos de mobilidade urbana nas cidades, principalmente em São José dos Campos. Pode-se afirmar que os objetivos propostos no início do projeto foram cumpridos, pois os resultados obtidos condizem com os esperados, visto que houve desde um desenvolvimento na área de estudos teóricos sobre o tema de mobilidade urbana e desenvolvimento de cidades, até aplicações com modelos estatísticos e em SIG.

Durante este período, várias atividades acadêmicas e de pesquisa foram atreladas ao projeto, em que se pode destacar a participação do bolsista no projeto “Quantificando o impacto de inundações na mobilidade das pessoas no espaço urbano” (Universal CNPq), que relaciona os conceitos de fluxos migratórios em um centro urbano com atributos de uma bacia hidrográfica, determinando assim qual é o impacto causado na mobilidade devido a um evento crítico hidrológico. Além disso, destaca-se a participação na elaboração da publicação científica, submetida ao XXI Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos (SBRH), intitulada “Desastres naturais de origem hidrológica e impactos no setor de transportes - o caso de março de 2015 em São José dos Campos-SP”. Houve também a participação do XVIII Encontro Latino Americano

de Iniciação Científica, promovido pela Universidade do Vale do Paraíba, com submissão e apresentação de trabalho com título “Deslocamentos populacionais intraurbanos – perspectivas computacionais e ambientais”.

Durante o período de iniciação científica, o bolsista apresentou bom rendimento acadêmico, em que o coeficiente de rendimento estipulado pela universidade aumentou, além de ter sido aprovado em todas as disciplinas do semestre.

Perspectivas

Para o próximo ano do projeto, espera-se aplicar diferentes metodologias no estudo de fluxos populacionais e processos estocásticos, abrangendo a distribuição exponencial e de Poisson. Uma vez que os resultados considerando a distribuição no espaço (de diferentes zonas para uma dada zona de chegada) não apresentaram resultados aderentes ao modelo exponencial nem ao modelo de Poisson, será analisada a componente temporal da dinâmica: tempo entre chegadas, visto que no dado original da Pesquisa Origem-Destino há a informação do horário de cada viagem. Os modelos do ponto de vista espacial ainda serão testados em dados de outras cidades.

O comportamento do gráfico de fluxo x distâncias e a aplicação do Modelo Gravitacional, referente às Zonas de Tráfego de São José dos Campos, serão novamente estudados, porém com dados reais de distâncias entre as ZTs, considerando não a distância euclidiana mas sim o comprimento da rota (caminho da viagem), bem como os dados reais de fluxo já utilizados, para verificação da aderência do modelo gravitacional utilizando alguma métrica de ajuste: análise quantitativa.

Referências

1. ARAÚJO, I. L. V. Transporte público complementar de passageiros: um estudo de caso em Betim. 2012. 125f. Dissertação (Mestrado em Geotecnia e Transportes) – Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), 2012.
2. SANTOS, L. B. L. Redes Complexas de Base Territorializada (RCBT): conceito, caracterização e seu potencial de aplicação na modelagem epidemiológica. 2014. 75f. Tese de Doutorado (Pós-Graduação em Computação Aplicada) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), 2014.
3. SANTOS, M. Metamorfoses do Espaço Habitado, fundamentos teóricos e metodológicos da geografia. Hucitec. São Paulo, 1988.

Anexos

- **Participação em eventos, congressos, exposições e feiras:**

1. Seminário Internacional de Mobilidade Urbana. 2014. (Seminário).

2. Apresentação com pôster no XVIII Encontro Latino Americano de Iniciação Científica. Deslocamentos Populacionais Intraurbanos - Perspectivas Computacionais e Ambientais. 2014. (Encontro).
3. Encontro Sobre Sustentabilidade e Resíduos Sólidos. Unesp ICT-SJC. 2014. (Encontro).
4. Reunião Regional da SBPC no Vale do Paraíba - Desastres Naturais no Brasil e Possíveis Tecnologias de Combate. 2014.
5. Desafios e ameaças da escassez hídrica para o Vale do Paraíba. Unesp ICT-SJC. 2014.
6. Encontro de Escolas do Projeto Cemaden Educação. (Carga horária: 8h). Centro Nacional de Monitoramento e Alertas de Desastres Naturais. 2014 (Encontro).
7. Minicurso Introdução à Modelagem Markoviana. (Carga horária: 6h). Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, INPE, Brasil.
8. Minicurso Métodos Computacionais em Problemas Inversos. (Carga horária: 6h). Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, INPE, Brasil.
9. Minicurso Tópicos em Fenômenos de Transporte. (Carga horária: 6h). Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, INPE, Brasil.

- **Dicionário:**

1. **Mobilidade urbana:** Deslocamento de pessoas e bens, condicionado pela infraestrutura em um espaço urbano, que determina os fluxos populacionais no espaço e tempo.
2. **Viagem:** Locomoção da população de uma região à outra, que ocorre geralmente com uma frequência constante, e é determinada pela Origem e Destino das pessoas.
3. **Pesquisas Origem-Destino:** Pesquisas que utilizam dados reais de deslocamentos diários de um lugar de Origem a um lugar de Destino, em uma região de estudo, de acordo com suas zonas de tráfego.
4. **SIG:** (Sistema de Informação Geográfica) É um gestor de dados que permite a análise geoespacial. Conjunto de ferramentas que captura, armazena, analisa, gerencia e apresenta dados que são ligados a sua localização. Integra informações locais e atributos, e possibilita visualizar vários padrões, relações e tendências.

5. **Shape:** É um tipo de arquivo digital que representa um conjunto de vários arquivos. Quatro arquivos individuais são obrigatórios para armazenar os dados do núcleo que compreende um shapefile. “São eles: o arquivo “.shp”, arquivo “.shx” (metadados), arquivo “.dbf”(tabela de atributos) e o arquivo “.prj” (projeção).
6. **SGBDG:** (Sistema de Gerenciamento de Banco de Dados Geográficos) SGBDG são softwares de gerenciamento de dados convencionais, como o *PostgreSQL* por exemplo.
7. **API:** (Application Programming Interface) API é a matriz dos aplicativos, ou seja, é o conjunto de padrões de programação que permite a construção e a utilização de aplicativos.
8. **Distance Matrix:** A API da Matriz de distâncias do Google é um serviço que fornece distância e tempo de deslocamento para uma matriz de origens e destinos. As informações retornadas são baseadas no trajeto recomendado entre pontos de partida e de chegada, conforme calculado pela API do Google Maps, e consistem em linhas que contêm valores *duration* e *distance* para cada par. Esse serviço não retorna informações detalhadas do trajeto.
9. **xml/ kml/ kmz:** XML (eXtensibleMarkupLanguage) é uma recomendação da W3C para gerar linguagens de marcação para necessidades especiais. KeyholeMarkupLanguage (KML) é uma linguagem baseada em XML e serve para expressar anotações geográficas e visualização de conteúdos existentes nessa linguagem e foi desenvolvido para uso com o Google Earth. Arquivos KML são frequentemente distribuídos como pacotes KMZ, que são arquivos KML zipados e usam a extensão a .kmz.
10. **Setores censitários urbanos:** Dados que consideram operações estatísticas realizadas sobre um país, ou região, em que são investigadas características de toda a população e dos domicílios. O IBGE classifica um setor analisado como urbano ou rural. Essa classificação é utilizada para determinar principalmente as manchas urbanas.
11. **Processos de chegada:** Processos de chegada apresentam caráter estocástico, em que as chegadas ocorrem no espaço e tempo de acordo com leis de probabilidade (distribuição de probabilidade).
12. **Poisson:** O modelo de Poisson para um problema de movimentação de pessoas em uma região é dado por: $f_i(k, \lambda_i) = (e^{-\lambda_i} \lambda_i^k) / k!$, em que λ_i é o parâmetro de Poisson a ser determinado para cada unidade de análise da região em questão, e, portanto, $f_i(k, \lambda_i)$ é a probabilidade de que k pessoas cheguem na zona i da região de estudo. Este modelo pode ser aplicado a dados de Origem-Destino para pesquisas de deslocamentos populacionais.

13. Markov: Um modelo de Markov é um processo estocástico, e é uma transição de estados, em que os estados anteriores são irrelevantes para a configuração dos estados seguintes, sendo que o estado atual é conhecido. Ou seja, a probabilidade do sistema estar em certo estado futuro depende apenas do estado atual do sistema.

14. Exponencial: O modelo exponencial traz que $f_i(k, \lambda_i) = 1 - e^{-\beta k}$, onde β é o parâmetro da distribuição exponencial, e $f_i(k, \lambda_i)$ é a probabilidade de que k pessoas cheguem na zona i da região de estudo. Este modelo pode ser aplicado a dados de Origem-Destino para pesquisas de deslocamentos populacionais.

15. Modelo gravitacional: O modelo gravitacional é um modelo de interação espacial que possibilita o ajuste do valor teórico de um dado. O objetivo da aplicação deste modelo é a posterior comparação entre os dados reais e os dados estimados pelo modelo gravitacional. Este modelo pode ser aplicado a dados de deslocamento populacional.